Examen bloque Álgebra
Opcion A

EJERCICIO 1A

(2'5 puntos) Halle la matriz *X* que verifique la ecuación matricial $A^2\cdot X = A - B\cdot C$, siendo *A*, *B* y *C* las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Solución

Halle la matriz *X* que verifique la ecuación matricial $A^2\cdot X = A - B\cdot C$,
Usando la fórmula del cálculo de la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(Adj(A)^t)$$

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 2 - 0 = 2;\ A^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix};\ Adj(A^T) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ A^{-1} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

De $A^2\cdot X = A - B\cdot C$, tenemos $(A^{-1})^2\cdot A^2\cdot X = (A^{-1})^2\cdot A - (A^{-1})^2\cdot B\cdot C \rightarrow I_2\cdot X = I_2\cdot A^{-1} - (A^{-1})^2\cdot B\cdot C \rightarrow X = A^{-1} - (A^{-1})^2\cdot B\cdot C$

$$(A^{-1})^2 = A^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3/4\\ 0 & 1/4\end{pmatrix};\ B\cdot C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = A^{-1} - (A^{-1})^2\cdot B\cdot C = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -3/4\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5 & -3/4\\ 2 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 1/4\\ -2 & 1/4\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2A

Considera el sistema dado por AX = B

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1\\ \alpha - 2\\ 3\end{pmatrix}\quad y\quad X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

a) [0'75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
b) [0'75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
c) [1 punto] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones.
Halla todas las soluciones en dichos casos.

Solución

a)
Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
La matriz de los coeficientes del sistema AX = B es

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{pmatrix},$$

y la matriz ampliada es

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene solución única si rango(A) = rango(A*) = 3 con lo cual det(A) = |A| $\neq$ 0.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = \alpha(\alpha - 8) - 0 + 3(4 + 1) = \alpha^2 - 8\alpha + 15.$$

De $\alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0$ obtenemos $\alpha = 3$ y $\alpha = 5$.
Si $\alpha \neq$ **3** y $\alpha \neq$ **5**, det(A) $\neq$ 0 con lo cual rango(A) = rango(A*) = 3 y **el sistema tiene solución única.**

b)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución

El sistema no tiene solución si rango(A) $\neq$ rango(A*). *Veamos los rangos de A y de A* para los valores $\alpha = 3$ y $\alpha = 5$.*

Si α **= 3**, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 3(3 - 4) - 0 + 3(2 - 1) = -3 + 3 = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema tiene más de una solución**, que es el caso (c) que resolveremos después.

Si α **= 5**, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 0 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 5(3 - 12) - 0 + 3(6 - 1) = -45 + 15 = -30 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene ninguna solución**.

c)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones.
Halla todas las soluciones en dichos casos.

Hemos visto que este caso se daba para α **= 3**, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema más de una solución**.
Como *el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que he formado el menor de orden dos distinto de cero*.

$3x + 2y - z = 1$

$y + 2z = 1$. Tomo $z = \lambda \in \mathbb{R}$, con lo cual $y = 1 - 2\lambda$.

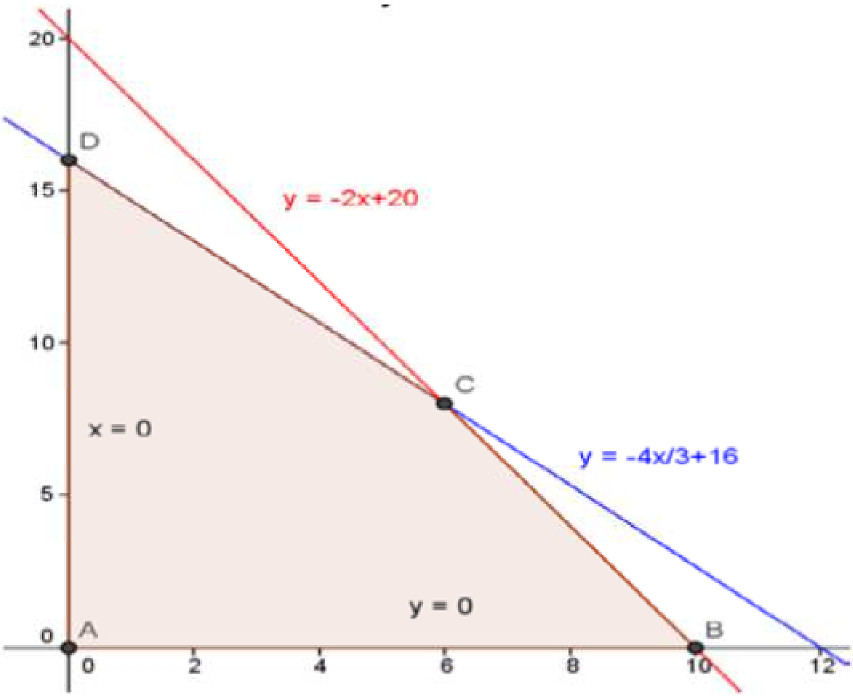
De $3x + 2(1 - 2\lambda) - (\lambda) = 1 \rightarrow 3x + 2 - 4\lambda - \lambda = 1 \rightarrow 3x = -1 + 5\lambda$, de donde $x = -1/3 + (5\lambda)/3$, y
la solución del sistema es $(x,y,z) = (1/3 + (5\lambda)/3, 1 - 2\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in$ R.

EJERCICIO 3A

(2'5 puntos) Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

Solución

Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?
"x" = Número de anillos primer tipo.
"y" = Número de anillos segundo tipo.
Función Objetivo **$F(x,y) = 150x + 100y$**. (los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 € el primero y 100 € el segundo)
Restricciones:
De "dispone de 48 g de oro, el primer tipo precisa 4 g de oro, el segundo necesita 3 g de oro", tenemos $\rightarrow 4x + 3y \le 48$
De "dispone de 20 g de plata, el primer tipo precisa 2 g de plata, el segundo necesita 1 g de plata", tenemos $\rightarrow 2x + y \le 20$
"Se fabrica algún anillo" $\rightarrow x \ge 0, y \ge 0$
Resumiendo tenemos las desigualdades: $4x + 3y \le 48$, $2x + y \le 20$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
Las desigualdades $4x + 3y \le 48$, $2x + y \le 20$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $4x + 3y = 48$, $2x + y = 20$, $x = 0$, $y = 0$
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y", y tenemos:
$y = -4x/3 + 16$, $y = -2x + 20$, $x = 0$, $y = 0$
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas, que es la región factible que sabemos es un polígono convexo.
Resolveremos las ecuaciones de las recta y obtendremos los vértices de dicho polígono convexo.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $x = 0$ e $y = 0$, luego el vértice A es el punto A(0,0)
De $y = 0$ e $y = -2x + 20$, tenemos $0 = -2x + 20$, luego $x = 10$. El vértice B es el punto B(10,0).
De $y = -2x+20$ e $y = -4x/3+16$, tenemos $-2x+20 = -4x/3+16$, es decir $-6x+60 = -4x+48$, luego $12 = 2x$ por tanto $x = 6$ e $y = 8$. El vértice C es el punto C(6,8).
De $x = 0$ e $y = -4x/3 + 16$, tenemos $y = 16$. El vértice D es el punto D(0,16).
Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(10,0), C(6,8) y D(0,16).
La región factible es el polígono convexo dibujado anteriormente con sus bordes y con vértices en los puntos A(0,0), B(10,0), C(6,8) y D(0,16).
Calculemos el mínimo de la función $F(x,y) = 150x + 100y$ en dicha región.
El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(10,0), C(6,8) y D(0,16). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.
$F(0,0) = 150(0) + 100(0) = 0$; $F(10,0) = 150(10) + 100(0) = 1500$;
$F(6,8) =$ $150(6) + 100(8) =$ **1700**; $F(0,16) = 150(0) + 100(16) = 1600$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 1700** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(6,8), es decir los ingresos máximos son de 1700 € y se alcanzan al producir 6 anillos del primer tipo y 8 del segundo tipo**.

EJERCICIO 4A

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$3x + 4y \geq 28$; $5x + 2y \leq 42$; $x - y \geq 0$.

a) **(0'5 puntos)** Razone si el punto de coordenadas (7, 3) pertenece al recinto.

b) **(1'5 puntos)** Represente dicho recinto y halle sus vértices.

c) **(0'5 puntos)** Calcule el valor máximo de la función F(x,y) = 3x – 2y + 6 en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

Solución

(a)

Razone si el punto de coordenadas (7,3) pertenece al recinto.

Sustituimos el punto (7,3) y vemos si verifica las tres inecuaciones a la vez.

$3x + 4y \geq 28$; $\rightarrow 3(7) + 4(3) \geq 28 \rightarrow 33 \geq 28$, cierto luego la verifica

$5x + 2y \leq 42$; $\rightarrow 5(7) + 2(3) \leq 42 \rightarrow 41 \leq 42$, cierto luego la verifica

$x - y \geq 0$; $\rightarrow (7) - (3) \geq 0 \rightarrow 4 \geq 0$, cierto luego la verifica

Luego el punto de coordenadas (7,3) pertenece al recinto.

(b)

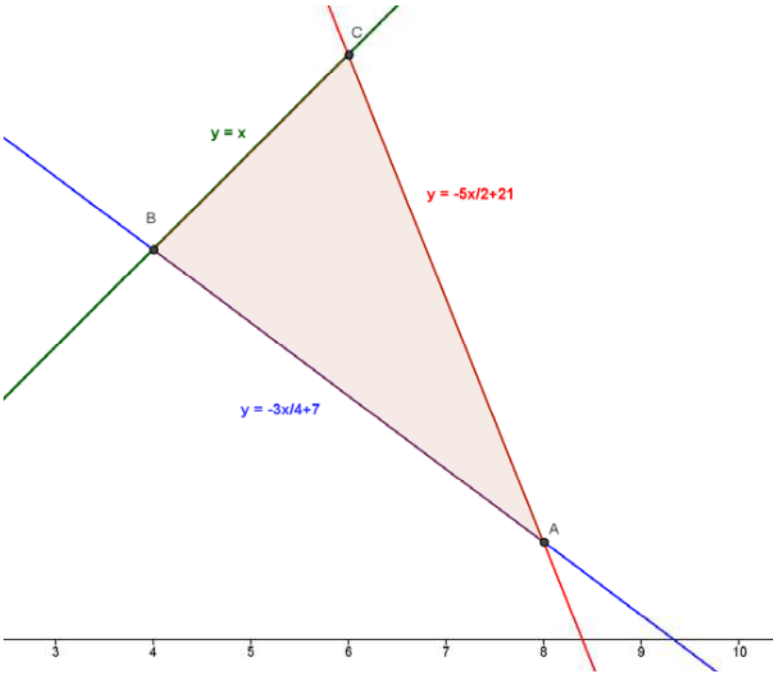
Represente dicho recinto y halle sus vértices.

Las desigualdades $3x + 4y \geq 28$; $5x + 2y \leq 42$; $x - y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $3x + 4y = 28$; $5x + 2y = 42$; $x - y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = -3x/4 + 7$; $y = -5x/2 + 21$; $y = x$;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -3x/4 + 7$ e $y = -5x/2 + 21$; tenemos $-3x/4 + 7 = -5x/2 + 21$, de donde "$-3x+28 = -10x+84$", es decir sale $7x=56$, de donde "$x = 8$" e "$y = 1$", y **el punto de corte es A(8,1)**

De $y = -3x/4 + 7$ e $y = x$; tenemos $-3x/4 + 7 = x$, de donde "$-3x+28 = 4x$", es decir sale $28=7x$, de donde "$x = 4$" e "$y = 4$", y **el punto de corte es B(4,4)**

De $y = -5x/2 + 21$ e $y = x$; tenemos $-5x/2 + 21 = x$, de donde "$-5x+42 = 2x$", es decir sale $42=7x$, de donde "$x = 6$" e "$y = 6$", y **el punto de corte es C(6,6)**

Fijándonos en la resolución de las ecuaciones, **los vértices del recinto son: A(8,1); B(4,4) y el C(6,6).**

(c)

Calcule el valor máximo de la función F(x,y) = 3x – 2y + 6 en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(8,1); B(4,4) y el C(6,6).

F(8,1) = 3(8) – 2(1) + 6 = **28**, F(4,4) = 3(4) – 2(4) + 6 = **10**, F(6,6) = 3(6) – 2(6) + 6 = 12

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el mínimo absoluto de la función F en la región es 10 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en el vértice B(4,4), y el máximo absoluto es 28 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto A(8,1).

Opción B

EJERCICIO 1B

Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz *F* se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz *G* se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array}$$

a) **(1 punto)** Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$.

b) **(0'75 puntos)** Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

c) **(0'75 puntos)** Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

Solución

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \\ \text{Cantidades} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \\ \\ \end{array} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{Ganancias} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \\ \\ \end{array}$$

(a)

Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$.

$$F^t \cdot G = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 150 & 250 \\ 80 & 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 & 1800 & 1100 \\ 1900 & 2450 & 1500 \\ 1040 & 1340 & 820 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot G^t = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2200 & 1390 \\ 3900 & 2470 \end{pmatrix}$$

(b)

Indique en qué matriz se pueden encontrar las **ganancias** que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas **de cada uno de los tres artículos** y especifique cuáles son esas ganancias.

Las ganancias de cada uno de los tres artículos es la diagonal principal de la matriz $F \cdot G_t$

1400 ganancias del artículo A

2450 ganancias del artículo B

820 ganancias del artículo C

(c)

Indique en qué matriz se pueden encontrar las **ganancias** que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas **en cada uno de los dos formatos**, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

Las ganancias de cada uno de los formatos es la la diagonal principal de la matriz $F_t \cdot G$

2200 ganancias del formato grande

2470 ganancias del formato normal.

La ganancia total es 2200 + 2470 = 4670.

EJERCICIO 2 B

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha x + y + 3z = 4$$
$$x + y - 2z = -2$$
$$-x + 2y + (3 + \alpha)z = 4 + \alpha$$

a) [1'25 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.

b) [1'25 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

Solución

a)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.

El sistema tiene solución única si rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas

con lo cual det(A) = |A| $\neq$ 0, siendo $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada es

$A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha & 4+\alpha \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1+\alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = \alpha(1+\alpha+6) - 1(1+\alpha-9) + 0 =$$

$= \alpha^2 + 6\alpha + 8$.

De |A| = 0 tenemos $\alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0$, y tiene de soluciones $\alpha = -2$ y $\alpha = -4$.

Si $\alpha \neq$ **-2** y $\alpha \neq$ **-4**, det(A) $\neq$ 0 con lo cual rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, y **el sistema tiene solución única.**

b)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

Si el sistema tiene dos soluciones, tiene infinitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado, que se presenta si rango(A) = rango(A) < 3 = número de incógnitas.*

Estudiamos los rangos de A y A* para $\alpha = -2$ y $\alpha = -4$

Si α = -2, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 0 - 3(4 - 4) + 0 = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema tiene más de una solución**. Lo resolvemos.

Como *el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que he formado el menor de orden dos distinto de cero*.

$-2x + y + 3z = 4 \rightarrow -2x + y + 3z = 4$

$x + y - 2z = -2$. $E_2 - E_1 \rightarrow 3x - 5z = -6$. Tomo $z = \lambda \in R$, con lo cual $x = -2 + (5/3)\lambda$.

De $-2(-2 + (5\lambda)/3) + y + 3(\lambda) = 4 \rightarrow y = 4 - 4 + (10\lambda)/3 - 3\lambda = 0 + \lambda/3 = \lambda/3$, de donde **la solución del sistema es $(x,y,z) = (-2 + (5\lambda)/3, \lambda/3, \lambda)$ con $\lambda \in$ R.**

Si α **= -4**, $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+2F_2 \\ = \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 0 -(-2)(-4 + 3) + 0 = -2 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene ninguna solución.**

EJERCICIO 3B

(1 punto) Plantee, sin resolver, el siguiente problema: "Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos mas el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, coma máximo, puede transportar este barco?" b) (1'5 puntos) Dado el recinto limitado por las inecuaciones $y \geq 30$, $3x - y \geq 150$, $6x + 7y \leq 840$, halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

Solución

a)

Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos mas el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?"

"x" = Número de coches.

"y" = Número de motos.

Función Objetivo **F(x,y) = x + y**. (Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco)

Restricciones:

De "el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble", tenemos $\rightarrow y \geq x/4$ e $y \leq 2x$

De "la suma del número de motos mas el doble del número de coches no puede ser mayor que 100", tenemos $\rightarrow 2x + y \leq 100$

"Se transporta algún vehículo" $\rightarrow x \geq 0$, $y \geq 0$

Resumiendo tenemos las **desigualdades:** $\mathbf{y \geq x/4,\ y \leq 2x,\ 2x + y \leq 100,\ x \geq 0,\ y \geq 0}$

b)

Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$y \geq 30$, $3x - y \geq 150$, $6x + 7y \leq 840$,

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x,y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

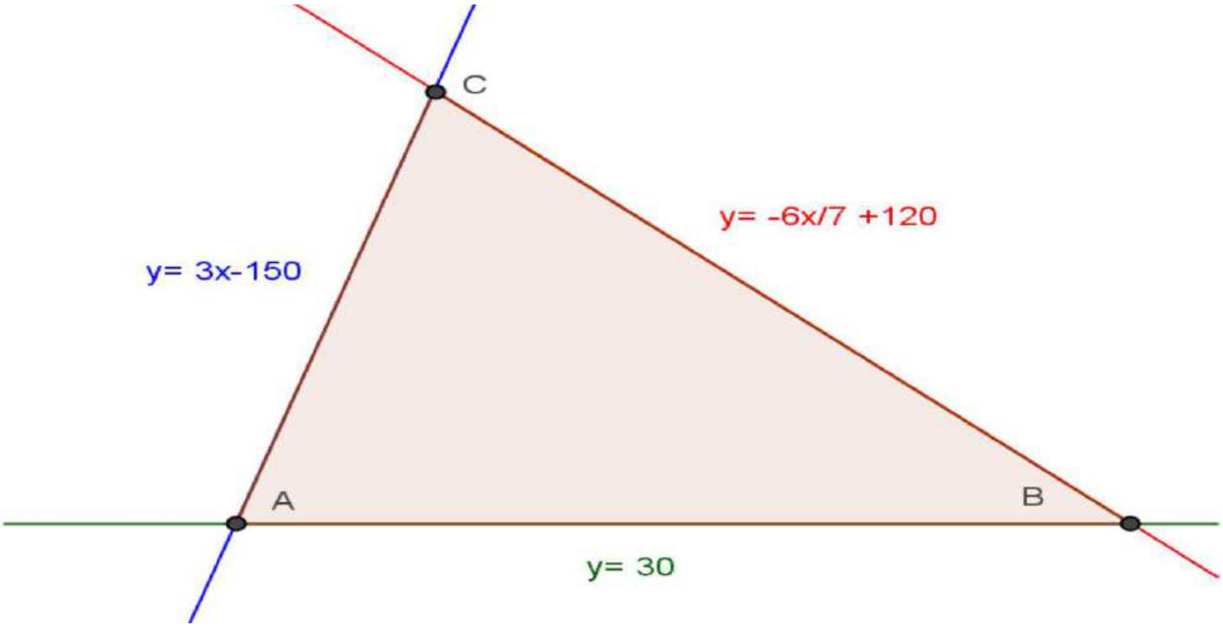
Función Objetivo **F(x,y) = 6x - 2y**

Restricciones: Las desigualdades $y \geq 30$, $3x - y \geq 150$, $6x + 7y \leq 840$

Las desigualdades $y \geq 30$, $3x - y \geq 150$, $6x + 7y \leq 840$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $y = 30$, $3x - y = 150$, $6x + 7y = 840$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos $y = 30$, $y = 3x - 150$, $y = -6x/7 + 120$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De y = 30 e y = 3x - 150, tenemos 30 = 3x-150, luego 180 = 3x, de donde x = 60. Punto de corte. Punto de corte A(60,30).
De y = 30 e y = -6x/7+120, tenemos 30 = -6x/7+120, es decir 210 = -6x+840, luego 6x = 630 por tanto x=105. Punto de corte B(105,30).
De y = 3x - 150 e y = -6x/7 + 120, tenemos 3x - 150 = -6x/7 + 120, de donde "21x-1050 = -6x+840", es decir 27x = 1890, luego "x = 70" e "y = 60", y el punto de corte es C(70,60).
Vemos que los vértices del recinto son: A(60,30), B(105,30) y C(70,60).
Calculemos el mínimo de la función F(x,y) = 6x - 2y en dicha región.
El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(60,30), B(105,30) y C(70,60). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.
F(60,30) = 6(60) - 2(30) = 300; F(105,30) = 6(105) - 2(30) = 570;
F(70,60) = 6(70) - 2(60) **= 300**.
Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es 300** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(60,30) y el vértice C(70,60), es decir en todos los puntos del segmento AC.**

EJERCICIO 4 B

Se desea maximizar la función F(x,y) = 14x + 8y en el recinto dado por:
y +3x ≥ 9; y ≤ -4x/7 + 14; 5x - 2y ≤ 15; x ≥ 0.
a) (1 punto) Represente la región factible del problema.
b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?
c) (0'5 puntos) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

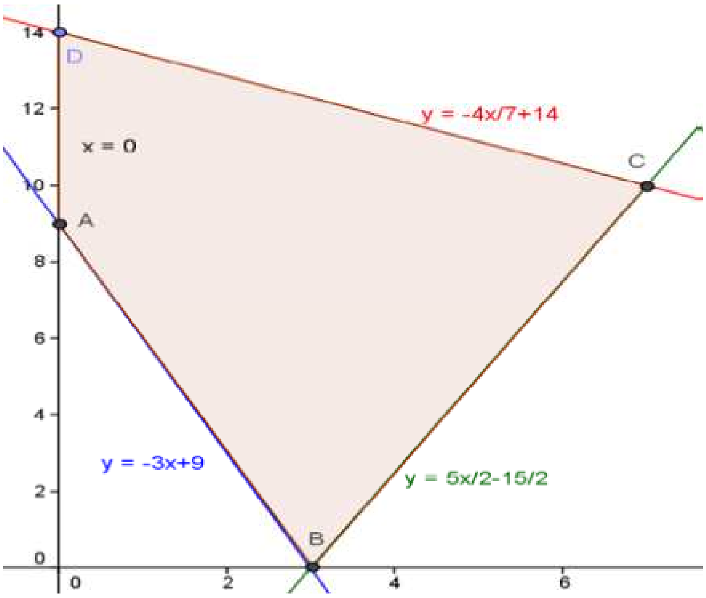
Solución

Se desea maximizar la función F(x,y) = 14x + 8y en el recinto dado por:
y +3x ≥ 9; y ≤ -4x/7 + 14; 5x - 2y ≤ 15; x ≥ 0.

a) Represente la región factible del problema.

Las desigualdades y + 3x ≥ 9; y ≤ -4x/7 + 14; 5x - 2y ≤ 15; x ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, y + 3x = 9; y = -4x/7 + 14; 5x - 2y = 15; x = 0.
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = -3x + 9; y = -4x/7 + 14; y = 5x/2 - 15/2; x = 0.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De x = 0 e y = -3x + 9, tenemos y = 9 y el vértice A(0,9).
De y = -3x+9 e y = 5x/2 – 15/2, tenemos -3x+9 = 5x/2 - 15/2 → -6x+18 = 5x - 15, → 33 = 11x, de donde x=3 e y = 0, y el vértice es B(3,0).

De y = 5x/2 – 15/2 e y = -4x/7 + 14, tenemos 5x/2 – 15/2 = -4x/7 + 14 → 35x – 105 = -8x + 196 →
→ 43x = 301 → x = 7, de donde y = 10, y el vértice es C(7,10).
De y = -4x/7 + 14 y x = 0, tenemos y = 14, y el vértice es D(0,14).
Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto son: A(0,9), B(3,0), C(7,10) y D(0,14).

b) ¿Cuál es el valor máximo de F(x,y) = 14x + 8y, y la solución óptima del problema?
El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,9), B(3,0), C(7,10) y D(0,14). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.
F(0,9) = 14(0) + 8(9) = 72; F(3,0) = 14(3) + 8(0) = 42;
F(7,10) = 14(7) + 8(10) = **178**; F(0,14) = 14(0) + 8(14) = 112
Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 178** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(7,10).**

c) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.
Un punto de la región factible que no sea el óptimo podría ser el vértice B(3,0), pues en él la función F vale 42.